

Uma nova formulação analítica para a resolução de problemas de poluição aquática

Vinicius Gadis Ribeiro¹
Cristiane Andrade Poffa²
Jorge Rodolfo Silva Zabada³

Resumo

A simulação de processos envolvendo propagação de poluentes em meio aquático detém elevada relevância, em razão de reduzir significativamente os custos do projeto e construção de redes de esgoto. As duas principais aplicações de sistemas de simulação em problemas de poluição aquática visam ao planejamento de redes de esgotos e simulação de acidentes no transporte aquático de cargas tóxicas. Ocorre que os métodos usualmente empregados para efetuar tais simulações demandam elevado tempo de processamento, inviabilizando ambas as aplicações mencionadas. O trabalho proposto apresenta um novo método analítico para a resolução de equações advectivo-difusivas, que reduz drasticamente o tempo de processamento requerido para efetuar ambas as aplicações. Embora o método seja baseado no emprego da Transformada de Fourier, que fornece soluções exatas apenas para problemas de poluição aquática em meio infinito, condições de contorno de segunda espécie podem ser incluídas na formulação a fim de que possam ser obtidas distribuições de concentração e substâncias químicas em corpos hídricos com formato complexo. Resultados analíticos são apresentados.

Palavras-chave: Simulação; Métodos híbridos; Poluição aquática.

Abstract

Simulation of processes involving pollutant dispersion in water bodies are very relevant, because it provides a significant reduction related to the design and building of sewer systems. The main applications of these systems are planning sewer systems and simulation of disposals during water transport. Unfortunately, the methods usually employed to carry out such a task demands high-time processing, and hence both applications becomes unfeasible. In this work a new analytical method for solving advection-diffusion equations is presented, which provides a drastic reduction of time-processing. Despite the method being based on the use of Fourier Transform, which provides exact solutions for water pollution problems only in infinite medium, boundary conditions of second kind can be included in order to obtain concentration profiles for bacteria and chemicals in complex shaped water bodies. Analytical results are reported

Keywords: Simulation; Hybrid methods; Aquatic pollution.

¹ Professor Doutor no Centro Universitário Ritter dos Reis – Faculdade de Informática – Porto Alegre, RS. E-mail: <vinicius@uniritter.edu.br>

² Professora na Fundação Universidade do Rio Grande – Departamento de Matemática – Rio Grande, RS. E-mail: <poffal@gmail.com>

³ Professor Doutor na Universidade Federal do Rio Grande do Sul – Departamento de Engenharia Nuclear – Porto Alegre, RS. E-mail: <jorge.zabada@ufrgs.br>

1 Introdução

O Lago Guaíba situa-se em Porto Alegre – estado do Rio Grande do Sul – e recebe principalmente efluentes orgânicos. Banhado pelo Rio Jacuí, caracteriza-se pela grande amplitude em área e pela baixa profundidade – em média, 2 metros. O norte do Lago Guaíba, onde se localiza o Delta – em particular, a região na qual deságua o Rio dos Sinos –, constitui um local de grande interesse do ponto de vista da análise do impacto ambiental. Essa região tem sido foco de atenções, devido a recente episódio que envolveu a morte de 86 toneladas de peixe, ao longo de trechos de grande atividade industrial. A fim de verificar a distribuição e propagação de poluentes na região corpo hídrico, foi conduzida simulação computacional, empregando o sistema Maple V. O presente trabalho trata da modelagem matemática empregada para o desenvolvimento do sistema.

A formulação e o uso de métodos híbridos têm por objetivo viabilizar a execução do sistema em microcomputadores, aumentando a velocidade de processamento e minimizando a quantidade de memória requerida. Os métodos numéricos, baseados em formulações discretas do tipo diferenças finitas e elementos finitos, fornecem, em geral, excelentes resultados no tratamento de problemas de transporte (THIKONOV, 1990). Entretanto, o custo computacional de ambas as formulações é bastante elevado. Simuladores que utilizam formulações em diferenças finitas possuem boa velocidade de processamento e requerem quantidade de memória aceitável para os modelos atuais de microcomputadores, quando a geometria do domínio a tratar é relativamente simples. Para domínios de maior complexidade, a geração de malhas retangulares dos sistemas em diferenças finitas ainda é deficiente, exigindo a discretização em um elevado número de elementos, o uso de malhas com densidade variável (DELANEY, 1983) ou o emprego de coordenadas curvilíneas que se adaptem à geometria dos contornos (HÄUSER; PAAP; EPPPEL, 1986; VALLENTINE, 1969; KOBER, 1957;

CHURCHILL, 1975; SPIEGEL, 1964). Já os simuladores que utilizam formulações em elementos finitos possuem geradores automáticos de malha triangular ou hexagonal, que se adaptam perfeitamente à geometria do domínio. Entretanto, produzem sistemas matriciais de ordem excessivamente elevada, demandando longo tempo de processamento e grande quantidade de memória (DHAUBADEL; REDDY; TELLIONIS, 1987). A adaptação de sistemas em diferenças finitas para operar sobre malhas produzidas originalmente para elementos finitos também não constitui uma solução viável, pois dificulta consideravelmente a montagem do sistema matricial, além de exigir o emprego de coeficientes métricos para efetuar transformações locais de coordenadas.

Algumas soluções alternativas foram consideradas e analisadas antes da obtenção da formulação final (WHITE, 1974; REDDY, 1986a; CONSTANTINIDES, 1987; GREENSPAN; CASULI, 1988; ORTEGA; POOLE, 1981; CARNAHAM, 1972; REDDY, 1986b; STRANG, 1980; DAVENPORT; SIRET; TOURNIER, 1988; WANG, 1985; KADANOFF, 1983; FROMM; HARLOW, 1963; TAKAISI, 1956; REALI; RANGOGI; PENNATI, 1984). Soluções variacionais contínuas foram empregadas anteriormente na elaboração de um sistema de simulação de propagação de coliformes e oxigênio (ZABADAL, 1991), produzindo resultados razoáveis e apresentando velocidade de processamento aceitável. Entretanto, a escolha das funções da base depende essencialmente da natureza dos cenários a simular e, até o presente momento, não foi possível elaborar um processo sistemático de seleção ou construção de bases. Foram também pesquisados sistemas baseados em transformadas integrais, que produzem soluções analíticas aproximadas, utilizando sistemas de computação simbólica. Dentre os sistemas pesquisados, o método da transformada integral generalizada de Mikhailov e Ozizik (1984) constitui o algoritmo mais eficiente na avaliação de soluções analíticas para problemas lineares ou passíveis de linearização. Contudo, a aplicação direta do

método da transformada integral generalizada requer o emprego de condições de contorno bastante complexas, o que gera uma série de dificuldades na implementação do sistema. A fim de evitar a aplicação das condições de contorno, foi elaborado um algoritmo híbrido que utiliza a Transformada de Fourier na obtenção de soluções aproximadas em forma analítica para a equação de dispersão em duas dimensões. Tal algoritmo depende do conhecimento prévio da distribuição de velocidades. A distribuição deve ser suficientemente acurada para satisfazer, automaticamente, as condições de contorno do problema relativas à presença de margens e ilhas. Nas proximidades dos contornos geográficos, o vetor velocidade deve tangenciar a linha das margens, anulando-se sobre a interface sólida. Para tanto, é preciso também obter o perfil hidráulico, problema que envolve um esforço computacional consideravelmente maior, uma vez que se trata de um sistema contendo duas equações diferenciais não lineares sem qualquer possibilidade de desacoplamento em coordenadas retangulares, devido à complexidade da geometria do domínio. A fim de reduzir o esforço computacional, foi obtida uma solução preliminar, utilizada como aproximação inicial para a aplicação de um esquema iterativo. A solução preliminar consiste na distribuição de velocidades para o escoamento potencial e visa reduzir o número de iterações a aplicar. No escoamento potencial, assume-se como hipótese simplificativa que não existe dissipação viscosa ao longo do escoamento. O método iterativo, a partir do qual se refina a solução, é obtido diretamente do princípio das aplicações contraídas (KOLMOGOROV, 1972), que constitui a base teórica para a formulação de diversos métodos numéricos e analíticos. O algoritmo possui ainda um acelerador de convergência que proporciona redução adicional no número de iterações necessário para atingir a exatidão desejada através do processo iterativo.

O desenvolvimento dos tópicos segue basicamente a mesma sequência da introdução. Na seção 2, é descrito o método empregado no cálculo da distribuição de concentrações,

e a seção 3 apresenta o algoritmo utilizado na obtenção da distribuição de velocidades. Informações consideradas dispensáveis à compreensão dos princípios básicos de funcionamento dos métodos elaborados são apresentadas nos apêndices.

2 Método de resolução da equação de dispersão

O método empregado na resolução da equação de dispersão utiliza o conceito "marcha no tempo" dos algoritmos TDT (Técnicas Dependentes do Tempo) (TORRES, 1980), cuja formulação foi inicialmente concebida para operar sobre esquemas numéricos em diferenças finitas do tipo explícito e aplicada na determinação de perfis de velocidade em regime estacionário através da resolução das equações de Navier-Stokes em sua forma transiente. A principal característica dos algoritmos TDT consiste na forma pela qual a malha é varrida. A malha é percorrida no sentido da corrente principal, tomando como condições de contorno apenas as vazões à montante do ponto sobre o qual se calculam as componentes da velocidade. O método utilizado difere do algoritmo TDT em dois aspectos: constroi soluções aproximadas em forma analítica ao invés de discretizar o domínio, e sua aplicação é restrita a problemas lineares ou linearizáveis, ao contrário da formulação original, aplicável a problemas fortemente não-lineares, tais como escoamentos transversais em bancos de tubos (ZABADAL; FERREIRA, 1990) e fluxos compressíveis em turbomáquinas (JAMESON; SCHMIDT; TURKEL, 1981). No trabalho proposto, o método é empregado na obtenção de soluções para a equação bidimensional de dispersão em regime estacionário já na forma linearizada. A linearização dos termos advectivos é efetuada através do uso de distribuições de velocidade previamente estabelecidas.

2.1 Soluções transientes para a equação de dispersão

O método híbrido, elaborado a partir do algoritmo TDT, consiste na obtenção de

soluções aproximadas em forma analítica para a equação de dispersão bidimensional em regime transiente, definida em coordenadas retangulares da seguinte forma:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial c}{\partial x} - v\frac{\partial c}{\partial y} - kc = \frac{\partial c}{\partial t} \quad (1)$$

onde D é o coeficiente de difusão; u e v são, respectivamente, as componentes da velocidade de escoamento nas direções x e y ; c é a concentração do poluente; k é a constante de decaimento bacteriano e t é o tempo decorrido desde o despejo da carga.

Tomando valores locais constantes para as componentes da velocidade, podem ser obtidas soluções válidas para pequenos intervalos de tempo a partir da condição inicial estabelecida. Aplicando a Transformada de Fourier nas variáveis x e y , resulta

$$[-D(\omega^2 + \alpha^2) - i(u\omega + v\alpha) - k]C = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2)$$

onde i é a unidade imaginária e as frequências ω e α (correspondem, respectivamente, às variáveis x e y). Essa equação a variáveis separáveis tem a seguinte solução:

$$C(\omega, \alpha, t) = C(\omega, \alpha, 0) e^{-[D(\omega^2 + \alpha^2) + i(u\omega + v\alpha) + k]t} \quad (3)$$

onde $C(\omega, \alpha, 0)$ representa a transformada da condição inicial.

A solução $c(x, y, t)$ é obtida após a aplicação da transformada inversa nas variáveis (J) e a

$$c(x, y, t) = c(x, y, 0) * \frac{e^{-\left[kt + \frac{(x-ut)^2 + (y-vt)^2}{4Dt}\right]}}{Dt} \quad (4)$$

onde o símbolo $*$ representa convolução. Uma vez que as componentes da velocidade foram consideradas constantes, a solução obtida é aplicável a uma pequena região nas proximidades do despejo e, conseqüentemente, durante um pequeno intervalo de tempo. Ao final desse intervalo, a solução é empregada como uma nova condição inicial para o problema. A partir dessa nova condição inicial, é calculada a solução válida para o próximo intervalo de tempo, e o processo se repete,

produzindo sucessivas distribuições de concentração para o poluente. Por essa razão o método é classificado como híbrido: a solução é contínua nas variáveis espaciais e discreta na variável tempo, agregando características comuns a métodos analíticos e numéricos. É importante salientar que aplicação da Transformada de Fourier é restrita a problemas de fronteira livre (meio infinito), razão pela qual nenhuma condição de contorno relativa a margens ou ilhas figura explicitamente na solução obtida. Na prática, o controle de margem é efetuado a cada intervalo de tempo, e sua eficiência depende da exatidão da distribuição de velocidades nas vizinhanças do ponto sobre o qual se calcula a concentração: caso a distribuição de velocidades não satisfaça às condições de contorno do problema, o controle se torna inviável, uma vez que o mapeamento geográfico do rio e a orientação do escoamento são incompatíveis.

2.2 Emprego das soluções transientes na resolução da equação estacionária

Distribuições estacionárias de concentração de poluentes empregadas em projetos de obras de saneamento básico são obtidas a partir da resolução da equação bidimensional de dispersão em regime estacionário:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial c}{\partial x} - v\frac{\partial c}{\partial y} - kc = q \quad (5)$$

na qual figuram todos os parâmetros definidos anteriormente. Nessa equação o termo transiente é substituído pela função fonte q , que representa a soma das contribuições de todas as cargas de poluente. Do ponto de vista físico, as equações diferem apenas no processo de descarga de poluentes: enquanto na forma transiente a carga é lançada uma única vez no tempo $t = 0$ (condição inicial do despejo), na forma estacionária a carga é alimentada continuamente, sofrendo reposição constante ao longo do tempo. As soluções da equação transiente podem ser utilizadas na obtenção de soluções aproximadas para a equação estacionária, assumindo-se algumas hipóteses simplificativas:

i) O processo contínuo de alimentação das cargas pode ser descrito de forma aproximada como uma sucessão de despejos a intervalos regulares de tempo – quanto menor o intervalo de tempo considerado entre dois despejos sucessivos, maior a exatidão do modelo.

ii) As fontes de carga são consideradas localmente isotrópicas, isto é, nos pontos de lançamento a dispersão se processa uniformemente em todas as direções.

iii) Direções preferenciais de propagação são determinadas exclusivamente pela distribuição de velocidades, considerada previamente estabelecida.

iv) Cada despejo sucessivo percorre o mesmo trajeto desde o ponto de descarga, ou seja, a distribuição de velocidades é estacionária (não varia com o tempo).

v) Os sucessivos conjuntos de isolinhas associados aos despejos individuais são considerados círculos concêntricos – assume-se que a corrente principal é responsável apenas pela trajetória das manchas, não afetando significativamente o seu formato. Essa aproximação não constitui uma hipótese previamente estipulada, mas uma constatação prática. Em simulações de acidentes de navios contendo cargas tóxicas, foi empregado anteriormente um sistema de cálculo que considera a deformação das isolinhas para poluentes solúveis e insolúveis em água. Para poluentes solúveis, foi constatado que a velocidade de crescimento das isolinhas supera amplamente a velocidade de deformação.

vi) O valor numérico da concentração em cada ponto é calculado utilizando-se a solução transiente que corresponde à mancha mais próxima, desde que esteja à montante do ponto.

vii) O período necessário para que o sistema atinja regime permanente é igual ao tempo máximo requerido para percorrer o corpo hídrico em toda a sua extensão.

Embora a hipótese v não seja necessária para garantir a aplicabilidade das soluções transientes ao problema estacionário, seu emprego reduz consideravelmente o tempo de processamento do sistema relativo à exatidão do método.

O emprego de soluções aproximadas em forma analítica facilita a obtenção de estimativas de incerteza (margens de erro). Ocorre que os métodos analíticos não produzem erros de arredondamento elevados, uma vez que efetuam um número bastante reduzido de operações sequenciais com ponto flutuante. Assim, as soluções obtidas podem ser diretamente substituídas nas equações que lhes deram origem, a fim de verificar sua validade. Esse processo é mostrado no apêndice A.

3 O modelo hidrodinâmico

O método utilizado na obtenção de soluções aproximadas para a equação de dispersão pressupõe a existência de uma distribuição de velocidades previamente estabelecida. O cálculo da distribuição de velocidades é efetuado através da resolução de um sistema formado pela equação da continuidade e pelas equações de Navier-Stokes em duas dimensões:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0 \quad (7)$$

$$v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - G = 0. \quad (8)$$

Nessas equações, u e v são, respectivamente, as componentes da velocidade nas direções x e y , ν é a viscosidade cinemática da água, as derivadas de p representam as componentes do gradiente de pressão, e a parcela G corresponde ao termo gravitacional $\rho g \Delta z$, em que Δz é a diferença de nível medida entre pontos à montante e à jusante do corpo hídrico. A parcela também incorpora um termo correspondente à oscilação da superfície, deduzido no apêndice B. A exemplo do modelo de dispersão, algumas hipóteses simplificativas são consideradas no desenvolvimento do modelo hidrodinâmico:

i) Assume-se que as vazões das cargas de esgoto não são suficientemente elevadas para perturbar a distribuição de velocidades. A hipótese refere-se especificamente às cargas

oriundas de esgotos, não incluindo os afluentes do Guaíba, cujas vazões são fatores determinantes do regime de escoamento. Essa simplificação permite desacoplar os sistemas hidrodinâmico e de dispersão, isto é, resolver as equações 11 e 12 independentemente da equação 5.

ii) O valor numérico da viscosidade cinemática da água refere-se à substância pura, não sendo consideradas alterações provocadas pela adição de matéria orgânica e pela presença de microorganismos. A justificativa para esta simplificação decorre do fato de que a viscosidade cinemática está presente apenas o termo de dissipação viscosa, responsável pelo desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica. Uma vez que, no tratamento de problemas em escala geográfica, a espessura da camada limite é desprezível (em geral, da ordem de centímetros), a região na qual o termo viscoso predomina pode ser negligenciada sem perda considerável de exatidão ou generalidade. Já no exterior da camada limite, o termo viscoso passa a ser desprezível em relação aos termos inerciais, de modo que qualquer refinamento no cálculo da viscosidade não proporciona redução apreciável de erro no resultado final.

iii) Os termos gravitacionais foram obtidos através do modelo de ondas de gravidade de Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1959). O emprego do modelo de Landau visa suprir uma deficiência do método proposto, que consiste na omissão da componente da velocidade na direção z . Embora a componente gravitacional não possa ser explicitamente incluída no modelo bidimensional utilizado, visto que atua na direção z , o efeito de sua inclusão nas componentes da velocidade em x e y pode ser estimado com o auxílio do modelo de ondas de gravidade.

iv) O gradiente de pressão é calculado a partir de uma distribuição potencial de velocidades, discutida em seções posteriores.

Com exceção da terceira hipótese, todas as aproximações têm por objetivo tornar viável a execução do sistema em microcomputadores através da redução do tempo de processamento e da quantidade de memória requerida. A

aplicação da terceira hipótese, contudo, é motivada pela própria limitação do método. Mesmo empregando métodos híbridos, a implementação em microcomputadores de sistemas para a solução de problemas tridimensionais dessa natureza é ainda inviável quanto ao tempo de processamento.

3.1 Método de obtenção da distribuição de velocidades

Assim como no tratamento da equação de dispersão, é possível linearizar o sistema formado pelas equações 11 e 12. Neste caso, a linearização consiste na obtenção de uma aproximação inicial para a distribuição de velocidades. A solução do sistema é obtida em três etapas:

- cálculo da distribuição de velocidades, considerando escoamento potencial (aproximação inicial);

- cálculo do gradiente de pressão a partir da aproximação obtida;

- inclusão de um modelo de turbulência;

As etapas de resolução são descritas na seção que se segue.

3.1.1 Cálculo da distribuição para escoamento potencial

A aproximação inicial para a distribuição de velocidades considera apenas a direção das linhas de fluxo do escoamento principal, obtendo uma estimativa para o módulo da velocidade na qual o atrito viscoso é desprezado. As duas equações básicas que regem o escoamento potencial são dadas, em duas dimensões, por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (9)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

A primeira expressão é a própria equação da continuidade em duas dimensões (equação 6). Essa equação equivale a um balanço de vazões sobre um pequeno volume de controle estático, como mostra a figura 1.

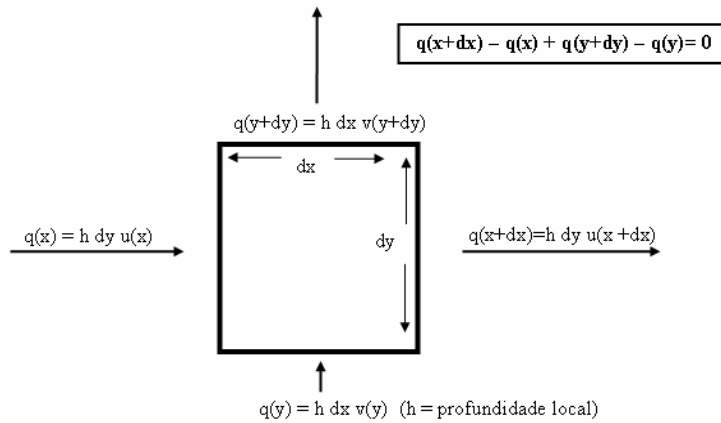


Figura 1 – Equação da continuidade

O balanço exige que as vazões de entrada e de saída sejam iguais, de modo que não haja acúmulo ou perda de fluido no volume.

A equivalência entre a equação 6 e o balanço de vazões mostrado na figura 1 é facilmente verificada. Substituindo as definições de $q(x+dx)$, $q(x)$, $q(y+dy)$ e $q(y)$ no balanço de vazões, resulta

$$hdy[u(x + dx) - u(x)] + hdx[v(y + dy) - v(y)] = 0 \quad (11)$$

Dividindo a equação por $hdx dy$, obtém-se

$$\frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} + \frac{v(y + dy) - v(y)}{dy} = 0 \quad (12)$$

que é a forma discreta da equação 6. A equação 10 impõe a restrição de escoamento irrotacional. Para que o escoamento seja irrotacional, é necessário que um volume de controle que acompanha o fluxo não sofra cisalhamento ao longo do caminho percorrido.

As figuras 2 e 3 exemplificam, respectivamente, os conceitos de escoamento rotacional e irrotacional: enquanto na figura 2 os ângulos dos vértices do elemento se alteram devido a diferenças de velocidade provocadas pelo atrito com uma interface sólida, na figura 3, as diferenças de velocidade se compensam, fazendo com que o elemento sofra apenas deslocamento e giro sem ocorrer deformação.

O termo irrotacional refere-se à preservação dos ângulos dos vértices do elemento

durante sua trajetória e não ao fato de o elemento sofrer rotação ao longo do escoamento. Note-se que o elemento da figura 3 sofre rotação, mas seus ângulos internos permanecem retos durante o processo. A figura 3, portanto, constitui um exemplo de escoamento irrotacional; na ausência de atrito viscoso junto a interfaces líquido-sólido, tais como margens ou paredes, pode-se assumir, sem incorrer em erro significativo, que os gradientes das componentes da velocidade se compensam, produzindo uma situação semelhante à da figura.

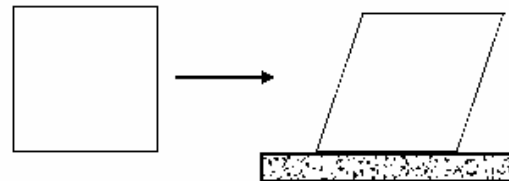


Figura 2 – Escoamento rotacional

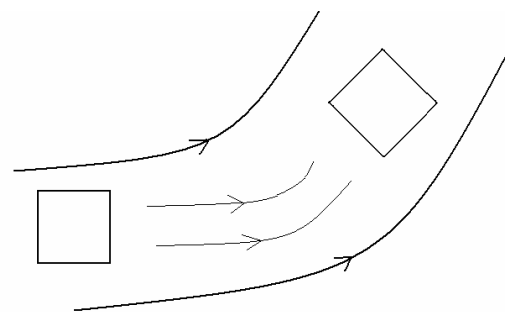


Figura 3 - Escoamento irrotacional

A figura 2 indica que a provável causa da ocorrência de escoamento rotacional seja a presença de paredes ou margens, que proporcionam um efeito de frenagem ao longo do percurso do fluido, devido ao atrito viscoso. De fato, é possível demonstrar que a imposição da equação da continuidade e da condição de escoamento irrotacional realmente equivale à hipótese simplificativa de ausência de atrito viscoso. Derivando a equação 9 em relação a x , e a equação 10 em relação a y , obtêm-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (14)$$

Somando as equações, resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (15)$$

O mesmo resultado é obtido para a componente v da velocidade. Derivando a equação 9 em relação a y , e a equação 10 em relação a x , obtêm-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

Somando os resultados, obtêm-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

Note-se que as equações 15 e 18 requerem a eliminação do primeiro termo das equações de Navier-Stokes (7 e 8), que são os responsáveis pelo atrito viscoso.

Assim, impor a exigência de escoamento irrotacional e da equação da continuidade equivale a assumir a ausência de atrito viscoso ao longo do escoamento. Nessas condições, o escoamento é denominado potencial, e o campo de velocidades obtido é chamado de distribuição potencial de velocidades.

3.1.2 - Cálculo do gradiente de pressão

O gradiente de pressão é estimado a partir da aproximação inicial obtida para a distribuição de velocidades. Isolando as derivadas da pressão nas equações de Navier-Stokes, obtêm-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - G \quad (19)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - G \quad (20)$$

Os valores numéricos das derivadas da pressão são calculados utilizando diferenças centrais com ordem de $(dx)^2$. Embora a inclusão do gradiente de pressão não reduza significativamente o erro da aproximação em situações típicas de escoamento, sua implementação não oferece maiores dificuldades, e sua execução não afeta de forma sensível o tempo de processamento do sistema. O termo foi incluído com o objetivo de prever situações de vazão elevada nas quais, eventualmente, poderão surgir gradientes de pressão locais.

3.1.3 - O modelo de turbulência

A turbulência consiste no surgimento de componentes de velocidade transversais à direção principal do escoamento, que perturbam o deslocamento das partículas produzindo um ruído de fundo sobre a trajetória do fluido. Esse fenômeno pode ser observado em filetes de água que saem de torneiras. A vazões moderadas, o filete apresenta duas regiões distintas: a região laminar, onde sua superfície se apresenta lisa, e a região turbulenta, na qual o filete se torna rugoso devido à presença das componentes transversais. Essas componentes também ocorrem no escoamento em corpos hídricos, embora sejam de difícil identificação, uma vez que geralmente não existem regiões laminares adjacentes para que seja possível observar zonas de transição.

A presença das componentes transversais atua na forma de propagação de bactérias e poluentes, proporcionando uma homogeneização muito mais eficiente do que a obtida

ao longo de um escoamento laminar, onde o mecanismo de mistura se deve à difusão molecular provocada pelo movimento browniano.

Para considerar os efeitos do surgimento de componentes transversais ao escoamento principal, foi utilizado o modelo de comprimento de mistura de Prandtl (SISSON; PITTS, 1979; SCHLICHTING, 1960; HINZE, 1975), apresentado no apêndice C.

3.2 Refinamento da solução e resultados obtidos

De posse da distribuição de velocidades para o escoamento potencial, podem ser efetuadas correções que levam em consideração o efeito do atrito viscoso, dos termos gravitacionais, do gradiente de pressão e das componentes transversais responsáveis pela turbulência.

A distribuição definitiva de velocidades é calculada através de um esquema iterativo, cuja aproximação inicial consiste na distribuição potencial que utiliza como termos gravitacionais as soluções do modelo de Landau e como definições para as componentes do gradiente de pressão as equações 19 e 20. O esquema iterativo é obtido diretamente do princípio das aplicações contraídas (KOLMOGOROV, 1972), que constitui a base de diversos métodos numéricos e analíticos para a resolução de equações integrais e diferenciais. Multiplicando as equações 7 e 8 por $-\lambda$, obtém-se

$$-\lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - g_x \right] = 0 \quad (21)$$

e

$$-\lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - g_y \right] = 0 \quad (22)$$

Somando u em ambos os membros da equação 21, e v em ambos os membros de 22, resulta

$$u = u - \lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - g_x \right] \quad (23)$$

e

$$v = v - \lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - g_y \right] \quad (24)$$

Ambas as operações não alteram o sistema de equações. A partir do novo sistema é aplicado o seguinte esquema iterativo:

$$u_{k+1} = u_k - \lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} \right) - u_k \frac{\partial u_k}{\partial x} - v \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - g_x \right] \quad (25)$$

e

$$v_{k+1} = v_k - \lambda \left[v \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} \right) - u_k \frac{\partial v_k}{\partial x} - v \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - g_y \right] \quad (26)$$

onde as aproximações para as componentes da velocidade são ajustadas localmente por quocientes entre polinômios, também denominados funções racionais (ZABADAL; FERREIRA, 1990):

$$u_k = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} x^i y^j} \quad (27)$$

e

$$v_k = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m c_{ij} x^i y^j}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m d_{ij} x^i y^j} \quad (28)$$

O valor numérico de λ , chamado fator de contração, é escolhido de modo a garantir a convergência das sucessivas aproximações para u e v . Para $\lambda = 0,25$, a solução converge com 3 algarismos significativos em cerca de 50 iterações, utilizando um acelerador de convergência baseado no método dos gradientes conjugados (BEVINGTON, 1969).

A distribuição de velocidades obtida através do refinamento é utilizada num segundo processo iterativo, a fim de incluir o efeito da turbulência na solução final. A aplicação do segundo processo requer cerca de 20 iterações adicionais e utiliza $\lambda = 0,18$ com o fator de contração. A divisão do processo em duas etapas se faz necessária, porque as componentes transversais da velocidade não

podem ser estimadas antes da avaliação dos gradientes de velocidade, os quais só podem ser determinados após a aplicação do primeiro esquema iterativo.

A tabela constante no Anexo C mostra valores da concentração de diversos parâmetros de qualidade de água (por exemplo, DBO, fosfato, OD, etc) em pontos localizados a partir de 600 m da foz do Rio dos Sinos, amostrados a intervalos regulares de 10 m (valores calculados). O tempo de processamento requerido para a obtenção desses dados foi inferior a 2 s.

Esses resultados concordam em todas as casas decimais, com os respectivos dados experimentais e valores produzidos pelo método explícito em diferenças finitas. Entretanto, o tempo de processamento necessário para produzir os resultados contidos na tabela referida é da ordem de 2 horas quando utilizado o método das diferenças finitas.

É importante salientar que os processos iterativos descritos não são aplicados durante a execução do programa, pois demandam considerável tempo de processamento. A obtenção do perfil hidrodinâmico se dá previamente com o auxílio de sistemas de computação simbólica, produzindo expressões em forma analítica para as componentes da velocidade. Essas expressões são posteriormente avaliadas em pontos de maior interesse para gerar um arquivo numérico utilizado pelo programa principal. A ideia básica que orienta a elaboração de todo o sistema é: são produzidas inicialmente soluções aproximadas em forma analítica para todos os modelos possíveis. Essas expressões são, então, utilizadas diretamente para produzir os resultados numéricos correspondentes.

Conclusões

A análise dos resultados obtidos e o tempo de processamento corroboram a premissa de que o método proposto produz resultados em tempo hábil para ambas as aplicações-problema citadas. O tempo de processamento requerido permite que sejam efetuadas centenas de simulações relativas à realocação de cargas, com o intuito de explorar de forma

otimizada a capacidade de autodepuração do Lago. Dessa forma, o planejamento de redes de esgoto baseado no emprego da solução analítica utilizada constitui uma tarefa perfeitamente factível, levando em consideração que as distribuições de concentração utilizadas para definir a distribuição ótima de redes de esgoto podem ser produzidas em poucas horas. O mesmo ocorre com problemas relativos a acidentes de cargas tóxicas. Considerando que, neste caso, torne-se necessário efetuar a simulação de um único cenário, o que demanda cerca menos de um minuto de processamento, as autoridades sanitárias podem tomar decisões em tempo real sobre a desativação de casa de bomba para abastecimento de água, a remoção total ou parcial do poluente em loco ou o tratamento químico – caso necessário.

No tocante à tecnologia empregada para obtenção de resultados, foi utilizado o software Maple V para a construção da solução em forma fechada – ou seja, da expressão que fornece o valor da concentração para cada ponto do domínio.

Referências

- BEVINGTON, P. **Data reduction and error analysis for the physical sciences**. New York: McGraw-Hill, 1969.
- CARNAHAM, J. **Applied Numerical Methods**. New York: McGraw-Hill, 1972.
- CHURCHILL, R. **Complex variables and its applications**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- CONSTANTINIDES, A. **Applied numerical methods with personal computers**. New York: McGraw-Hill, 1987.
- DAVENPORT, J.; SIRET, Y.; TOURNIER, E. **Computer algebra**. New York: Academic Press, 1988.
- DELANEY, R. Time-marching analysis of steady transonic flow in turbomachinery cascades using the Hopscotch method. **Journal of Engineering for Power**, New York, v. 105, p. 272-279, 1983.

- DHAUBADEL, M.; REDDY, J.; TELLIONIS, O. Finite-element analysis of fluid flow and heat transfer for staggered bundles of cylinders in cross flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Hoboken, NJ, v. 7, p. 1325-1342, 1987.
- FROMM, J.; HARLOW, H. Numerical solution of the problem of vortex street development. **The physics of fluids**, Santa Barbara, CA, v. 6, p. 975-982, 1963.
- GREENSPAN, O.; CASULI, V. **Numerical analysis for applied mathematics, science and engineering**. Redwood City: Addison-Wesley, Publishing CO, 1988.
- HÄUSER, J.; PAAP, H.; EPPEL, O. **Boundary conformed coordinate systems for fluid flow problems**. Swansea: Pineridge Press, 1986.
- HINZE, O. **Turbulence**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. *In*: FLUID AND PLAMA DYNAMICS, 14th, 1981, Palo Alto. **Anais...** Paio Alto, AIAA, 1981.
- KADANOFF, L. Roads to chaos. **Physics Today**, New York, 1983.
- KOBER, H. **Oictionary of conformal representations**. Londres: Oover Publications, 1957.
- KOLMOGOROV, Fomin. **Elementos de la teoria de funciones e dei analisis funcional**. Moscou: Ed. Mir, 1972.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **Fluid mechanics**. Londres: Pergamon Press, 1959.
- MIKHAILOV, A.; OZIZIK, N. **The generalized integral transform technique**. New York: McGraw-Hill, 1984.
- ORTEGA, J.; POOLE, W. **Numerical methods for differential equations**. Marshfield: Pitman Publishing, 1981.
- REALI, M.; RANGOGNI, R.; PENNATI, V. Compact analytic expressions of two dimensional finite difference forms. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Hoboken, NJ, v.20, p. 121-130,1984.
- REDDY, J. **Applied functional analysis and variational methods in engineering**. New York: McGraw-Hill, 1986a.
- REDDY, J. **Functional analysis and variational methods in engineering**. New York: McGraw-Hill, 1986b.
- STRANG, G. **Introduction to applied mathematics**. Wellesley: Wellesley Cambridge Press, 1986.
- SCHLICHTING, H. **Boundary layer theory**. New York: McGraw-Hill, 1960.
- SISSON, L.; PITTS, D. **Fenômenos de transporte**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- SPIEGEL, M. **Theory and problems of complex variables**. New York: Schaum Publishing, 1964.
- STRANG, G. **Linear algebra and its applications**. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich, 1980.
- TAKAISI, Y. The drag on a circular cylinder placed in a stream of viscous liquid midway between two parallel plates. **Journal of the Physical Society of Japan**, Tóquio, v.11, p.1092-1095, 1956.
- TIKHONOV, A, GONCHARSKY, A, STEPANOV, V., LAGOLA, A. **Numerical methods for ill-posed problems**. Moscou: Nauka, 1990.
- TORRES, J. **Time-marching solution of transonic duct flows**. Tese (Doutorado em Física) – Univercity Londres, Londres, 1980.
- VALLENTINE, H. **Applied hydrodynamics**. Londres: Butterworth & Co. Ltd. 1969.
- WANG, P. A potential and stream function analysis of two-dimensional steady-state convective diffusion equations involving Laplace fields. **International journal of heat transfer**, Londres, v. 28, pp.1089-1095, 1985.
- WHITE, F. **Viscous fluid flow**. New York: McGraw-Hill, 1974.

ZABADAL, J. **Propagação de bactérias e substâncias químicas no rio Guaíba**. Porto Alegre: DMAE/CESB, 1991.

ZABADAL, J.; FERREIRA, V. Flow fluid simulation in tube banks. *In: CONGRESO NACIONAL DE INGENIERIA MECANICA*, 9. 1990, Santiago. *Anais...* Santiago, Chile, 1990.

Apêndice A - Estimativa da incerteza do método

A margem de erro decorrente da aplicação de soluções transientes do tipo

$$c(x, y, t) = c(x, y, 0) * \frac{e^{-\left[kt + \frac{(x-ut)^2 + (y-vt)^2}{4Dt}\right]}}{Dt} \quad (\text{A.1})$$

na obtenção de distribuições de concentração em regime estacionário pode ser estimada através da substituição sobre a equação original. Substituindo a solução (6) na equação estacionária (5), obtém-se uma função que representa o erro da aproximação em cada ponto. A forma explícita da função é bastante extensa, sendo apresentada em anexo.

A solução seria exata, caso o erro resultante fosse nulo, isto é, se a aplicação do operador

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - k \quad (\text{A.2})$$

transformasse $c(x, y, t)$ na função fonte. Contudo, nem mesmo a função fonte q é previamente conhecida. É necessário, portanto, estabelecer uma expressão analítica para a função fonte através de um modelo auxiliar.

A.1 - Determinação da função fonte

A determinação da função fonte consiste na solução da equação estacionária para uma pequena região em torno do ponto de descarga:

$$D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} - kc = c_d \delta(x - x_d) \delta(y - y_d) \quad (\text{A.3})$$

onde δ denota a função delta de Dirac, que representa uma fonte pontual contendo toda

a carga lançada, e o sub-índice d refere-se ao ponto de descarga. Tomando novamente valores locais constantes para as componentes da velocidade, bem como dos parâmetros D e k e aplicando a Transformada de Fourier nas variáveis x e y , resulta

$$\left[-D(\omega^2 - \alpha^2) - i(u\omega + v\alpha) - k \right] C = c_d \quad (\text{A.4})$$

onde, a exemplo do problema transiente, i é a unidade imaginária, as frequências ω e α correspondem, respectivamente, às variáveis x e y , e as letras maiúsculas denotam as transformadas das funções originais. A solução da equação (2) é imediata: isolando C e aplicando a transformada inversa, obtém-se a função fonte:

$$c = q = c_d F^{-1} \left\{ 1 / \left[-D(\omega^2 - \alpha^2) - i(u\omega + v\alpha) - k \right] \right\} \quad (\text{A.5})$$

A função resultante é muito próxima da solução exata, uma vez que as hipóteses de velocidade e parâmetros constantes são realmente válidas nas vizinhanças dos pontos de descarga.

Estabelecida uma expressão analítica para a função fonte, podem ser calculados valores numéricos para a incerteza da solução. Para tanto, bastam substituir valores típicos de difusão, componentes de velocidade e tempo de propagação na função que descreve o comportamento do erro. Para valores de u e v entre 0 e 0,3, D entre 0 e 0,5 e t entre 0 e 100, a incerteza assume valores entre 20% e 80%.

Apêndice B - O modelo de ondulação

Na ausência de perturbações externas, a superfície de um fluido em equilíbrio com forças gravitacionais é aproximadamente plana. No estudo do comportamento transiente de corpos hídricos, o principal fator de perturbação da superfície é a incidência de ventos. O modelo a seguir descreve de forma aproximada os fenômenos físicos envolvidos nessa interação e apresenta o tratamento quantitativo correspondente para problemas em regime estacionário.

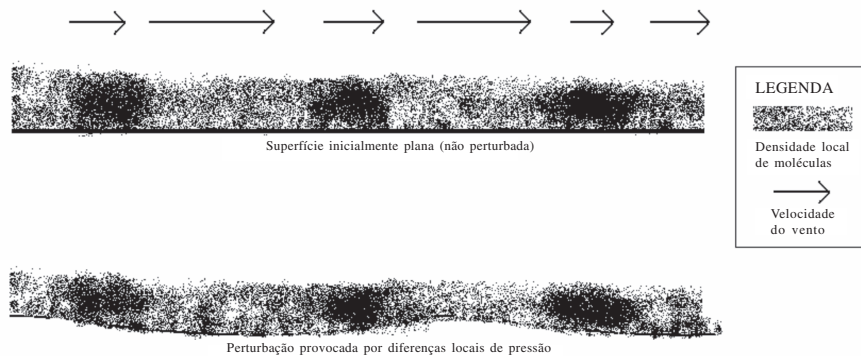


Figura B1 – Perturbação da superfície pela ação dos ventos

A figura B1 mostra o principal mecanismo de perturbação de uma superfície de fluido inicialmente plana, que consiste na formação de zonas de pressão diferenciada, devido a variações locais na velocidade do vento. Nas zonas de menor velocidade, a pressão do ar sobre a superfície da água sofre um pequeno crescimento, porque a desaceleração provoca um adensamento local de moléculas nas vizinhanças da região de frenagem. Esse aumento local de concentração de moléculas provoca uma pequena depressão na superfície da água e uma pequena elevação em regiões adjacentes. O deslocamento da superfície é, então, revertido pela força gravitacional e perturbado pela incidência de novas ondas de pressão, sofrendo uma sucessão de interferências parcialmente construtivas e destrutivas, conforme a fase da onda em relação ao vento.

A componente vertical da pressão que atua sobre um elemento de fluido sujeito à ação de perturbações externas pode ser estimada utilizando a equação de Bernoulli sobre a direção z , que representa uma simplificação da equação de Navier-Stokes nessa variável:

$$p = -\rho g z - \frac{\rho w^2}{2} \quad (\text{B.1})$$

onde p e w representam, respectivamente, as componentes da pressão e da velocidade de escoamento na direção z , g é a aceleração da gravidade e ρ é a massa específica da água. O primeiro termo representa a pressão estática da coluna de água de altura z , medida em relação à cota zero indicada na figura, e o segundo corresponde à pressão dinâmica

provocada pela frenagem do fluido desde a cota zero até o pico (máximo ou o mínimo). A equação de Bernoulli é obtida a partir da equação de Navier-Stokes pela supressão do termo viscoso, seguida da integração na variável espacial (neste caso, z) entre a cota zero e o pico. A integração é necessária para eliminar a dependência de w com z . Uma vez que a componente w da velocidade não pode figurar no modelo bidimensional, é tomado o valor constante $w(0)$, correspondente à cota zero. O valor experimental de $w(0)$, obtido diretamente de medidas de campo, é de aproximadamente 0,25 m/s, e pode ser considerado independente da amplitude das oscilações.

O membro direito da equação 25 representa apenas a pressão sobre o meio líquido ao sofrer uma perturbação externa, sem que seja especificada a origem dessa perturbação. O fator responsável pela perturbação da superfície é a ação dos ventos, que corresponde ao membro esquerdo da equação. A pressão devida a variações locais na velocidade do vento pode também ser descrita pela equação de Bernoulli. Neste caso, entretanto, o termo correspondente à pressão estática pode ser eliminado, pois a força exercida pelo peso de uma coluna de ar de altura igual à amplitude de oscilação das ondas é desprezível frente à pressão dinâmica:

$$p = -\frac{\rho' v'^2}{2} \quad (\text{B.2})$$

onde ρ' é a massa específica do ar, e v' é o módulo da velocidade do vento. Nesta equação, as componentes da velocidade do vento não são consideradas separadamente:

assume-se que a velocidade do vento é uniforme em toda a extensão do corpo hídrico. Substituindo a expressão obtida na equação 25, obtém-se

$$\frac{\rho' v'^2}{2} = \rho g z + \frac{\rho w^2}{2} \quad (\text{B.3})$$

Isolando, em seguida, a parcela gravitacional, resulta

$$\rho g z = \frac{\rho w^2}{2} - \frac{\rho' v'^2}{2} \quad (\text{B.4})$$

Esta é a parcela a adicionar sobre os termos gravitacionais nas equações de Navier-Stokes em x e y . Uma vez que o efeito da ondulação pode ser considerado isotrópico no plano xy , isto é, que atua de maneira uniforme em todas as direções, as contribuições em ambas as variáveis devem ser iguais. Assim,

$$G_x = G_y = \frac{\rho w^2}{2} - \frac{\rho' v'^2}{2} \quad (\text{B5})$$

Por essa razão, a contribuição para o termo gravitacional nas equações de Navier-Stokes não possui índice, sendo expressa simplesmente como G em ambas as equações.

Na prática, a equação de Bernouilli reproduz com exatidão aceitável o comportamento da superfície oscilante. Um tratamento mais rigoroso desse fenômeno exigiria a formulação de modelos transientes bastante complexos, cuja resolução seria dispendiosa e não proporcionaria redução sensível na margem de erro do resultado final.

Apêndice C - O modelo de turbulência

A turbulência se caracteriza pela presença de componentes de velocidade transversais ao sentido principal de propagação da corrente. Essas componentes são chamadas flutuantes, porque geram pequenas flutuações

aparentemente aleatórias sobre a corrente principal, cujo valor médio ao longo do tempo é zero.

As componentes flutuantes de velocidade são originadas por perturbações em escala microscópica que provocam desvios na trajetória de algumas moléculas de fluido. Os desvios resultam em colisões com as moléculas que percorrem o sentido principal do escoamento, propagando a perturbação através do fluido. As perturbações iniciais se devem comumente à irregularidade da interface sólida, a efeitos térmicos (correntes convectivas) e à ação de forças externas. No escoamento em corpos hídricos, os efeitos térmicos podem ser desprezados, uma vez que as diferenças de temperatura não provocam a formação de correntes ascendentes (em geral as temperaturas mais elevadas ocorrem na superfície). A ação de forças externas, por sua vez, refere-se à ondulação da superfície, fenômeno descrito no apêndice B.

C.1- Inclusão das componentes flutuantes no modelo hidrodinâmico

As componentes da velocidade de escoamento podem ser decompostas em somas de parcelas médias e flutuantes:

$$u = \bar{u} + u' \quad (\text{C.1})$$

$$e \quad v = \bar{v} + v' \quad (\text{C.2})$$

As parcelas médias denotadas pela barra, que correspondem ao escoamento principal, definem a direção de propagação do fluido na ausência de perturbações. As parcelas flutuantes, contendo o índice ' representam as flutuações que caracterizam a turbulência. Substituindo as parcelas médias e flutuantes no sistema de equações que define o comportamento do escoamento, obtém-se

$$\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$v \left(\frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \right) - (\bar{u} + u') \left(\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x} \right) - (\bar{v} + v') \left(\frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$v \left(\frac{\partial^2 (\bar{v} + v')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{v} + v')}{\partial y^2} \right) - (\bar{u} + u') \left(\frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial x} \right) - (\bar{v} + v') \left(\frac{\partial (\bar{v} + v')}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - G = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

(C.6)

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u'}{\partial x} - v \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - u' \frac{\partial u'}{\partial x} - v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0.$$

(C.7)

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial v'}{\partial x} - v \frac{\partial v'}{\partial y} - u' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - u' \frac{\partial v'}{\partial x} - v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0.$$

(C.8)

A expansão das expressões obtidas resulta nas fórmulas acima, onde as flutuações nas componentes do gradiente de pressão foram desconsideradas, uma vez que a própria ordem de grandeza das parcelas médias correspondentes é menor do que a dos demais termos das equações de Navier-Stokes.

Em regime estacionário, as quantidades de interesse no tratamento do problema são as médias temporais. Uma vez que as médias temporais das flutuações são nulas, todos os termos lineares contendo componentes flutuantes também se anulam quando calculadas suas médias ao longo de um intervalo suficientemente longo de tempo. Tomando as médias temporais sobre as equações 34, 35 e 36, resulta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (C.9)$$

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - u' \frac{\partial u'}{\partial x} - v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0$$

(C.10)

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - u' \frac{\partial v'}{\partial x} - v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G = 0.$$

(C.11)

Os termos não-lineares envolvendo componentes flutuantes dependem dos valores das componentes médias, uma vez que a intensidade das flutuações cresce com a velocidade de escoamento. É conveniente, portanto, buscar expressões que relacionem diretamente as componentes médias e flutuantes, a fim de evitar a inclusão de duas variáveis adicionais

ao sistema. As expressões que relacionam as componentes médias e flutuantes são obtidas utilizando o modelo de comprimento de mistura de Prandtl (TORRES, 1980), descrito a seguir.

C.2 - O modelo de comprimento de mistura

Em corpos hídricos, o surgimento de componentes flutuantes se deve essencialmente a dois tipos de perturbação mecânica: escoamento junto a superfícies sólidas irregulares e presença de ondulações. Ambos os mecanismos de perturbação produzem gradientes consideráveis nas componentes de velocidade. Prandtl supôs que a ordem de grandeza das componentes flutuantes é igual à dos gradientes produzidos durante a perturbação:

$$|u'| = l_1 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (C.12)$$

e

$$|v'| = l_2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (C.13)$$

onde l_1 e l_2 são fatores de proporcionalidade denominados comprimentos de mistura, devido às suas dimensões e à característica do escoamento turbulento de proporcionar misturas homogêneas. Para o tratamento do problema em estudo, considera-se que o efeito da turbulência é isotrópico, tal como o efeito da ondulação de superfície, e que, portanto, os comprimentos de mistura são iguais,

$$l_1 = l_2 = 1 \quad (C.14)$$

e, assim, os módulos das componentes flutuantes também são iguais:

$$|u'| = |v'| . \quad (C.15)$$

O comprimento de mistura, por sua vez, também depende das componentes médias da velocidade de escoamento. Von Kármán (MIKHAÏLOV; OZIZIK, 1984) obteve a seguinte relação semi-empírica para l em função do perfil de velocidades:

$$l = 0.4 \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|} . \quad (C.16)$$

Os termos não lineares contendo componentes flutuantes podem ser agora estimados. O primeiro termo contém a derivada do quadrado de u' :

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x} \quad (C.17)$$

O quadrado da componente flutuante pode ser obtido diretamente do modelo de comprimento de mistura:

$$u'^2 = l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (C.18)$$

Substituindo a expressão para o comprimento de mistura dada por 40, resulta

$$u'^2 = 0.16 \frac{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2} . \quad (C.19)$$

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 - \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - G - 0.16 \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|^2} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} \right) \right] = 0$$

(C. 24)

e

$$v \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right)^2 - \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - G - 0.16 \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|^2} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} \right) \right] = 0$$

(C.25)

Derivando em relação a x e dividindo por 2 e reagrupando parcelas, obtém-se o termo desejado:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x} = 0.16 \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|^2} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (C.20)$$

De maneira análoga é calculada a derivada do quadrado de v' em relação a y , presente no último termo não linear:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial x} = 0.16 \frac{\left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|^2}{\left| \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right|^2} \left[2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3} \right] \quad (C.21)$$

Note-se que os dois termos restantes consistem em derivadas de produtos. Uma vez que a turbulência é considerada isotrópica, todos os produtos entre componentes flutuantes da velocidade devem ser iguais e, assim,

$$v' \frac{\partial u'}{\partial y} = u' \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial u' v'}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial y} \quad (C.22)$$

e

$$u' \frac{\partial v'}{\partial x} = v' \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u' v'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial x} \quad (C.23)$$

Dessa forma, as contribuições das parcelas turbulentas em ambas as equações de Navier-Stokes são também iguais. Substituindo os resultados obtidos em 31 e 32, obtém-se

Estas são as formas finais das equações de Navier-Stokes em regime estacionário considerando escoamento turbulento isotrópico. A equação da continuidade permanece inalterada, uma vez que contém apenas termos lineares, cujos valores eficazes (médias temporais) se anulam em regime estacionário.

ANEXO – Solução Explícita: Tabela de concentração de DBO, Nitrogênio, Fósforo e Oxigênio para a foz do Rio dos Sinos

Data	Hora	Vazão m ³ /s	DbO5 mg/l	N total mg/l	P total mg/l	Oxigênio mg/l
03/10/89	1355	81.90	6.1	1.37	0.34	8.2
08/11/89	1410	27.00	2	2.02	****	4.3
06/12/89	1340	32.50	4.3	2.4	0.25	3.5
10/01/90	1225	22.40	****	3.28	0.49	2.3
07/02/90	1500	24.00	6	2.64	0.36	5.8
09/03/90	1230	57.40	5.1	1.76	0.38	3.6
04/04/90	1150	74.30	2.9	3.38	0.37	4.4
14/05/90	1200	45.10	4.5	1.6	0.34	4.3
06/06/90	1645	150.00	1.6	1.19	0.35	5
11/07/90	1505	184.00	2.1	1.52	0.37	6
08/08/90	1205	35.90	5.8	3.24	0.44	5
13/09/90	1240	287.00	3.9	1.73	0.6	5.3
11/10/90	1415	187.00	1.3	1.28	0.37	4.4
08/11/90	1215	220.00	2.8	1.33	0.34	4.6
05/12/90	1240	33.30	5.4	1.97	0.3	3.6
09/01/91	1330	22.20	2.9	2.89	0.61	5.3
06/02/91	1230	20.30	8.2	3.48	0.41	3
06/03/91	1230	21.10	5.8	5.34	0.75	4.8
03/04/91	1230	10.10	6	7.68	0.61	4.4
02/05/91	800	****	****	****	****	****
05/06/91	****	32.60	5.5	6.17	0.95	0.8
05/07/91	1150	50.80	2.3	2.63	0.38	5.8
07/08/91	1240	198.00	2.2	1.65	0.7	7.4
04/09/91	1140	37.70	2.6	2.62	0.3	4
09/10/91	1130	93.50	2.4	1.66	0.36	5.2
06/11/91	1105	74.50	2.6	1.78	0.33	5.5
05/12/91	1155	27.90	4.3	3.88	0.78	1.8

Data	Hora	Vazão m ³ /s	DbO5 mg/l	N total mg/l	P total mg/l	Oxigênio mg/l
09/01/92	1020	66.70	1.8	1.1	0.45	2.7
05/02/92	1110	258.00	3	1.48	0.35	3.2
11/03/92	1130	24.30	5.6	3.12	0.6	2.8
08/04/92	1145	212.00	1.3	1.32	0.44	3.3
06/05/92	1235	46.00	3.3	2.22	0.38	3.2
03/06/92	1145	192.00	1.6	1.03	0.31	5.8
08/07/92	1210	377.00	1.9	1.03	0.28	6.4
05/08/92	1205	246.00	1.6	1	0.25	7.2
06/09/92	1140	80.50	3.1	1.97	0.34	5.5
07/10/92	1050	117.00	1.3	1.06	0.3	5.2
05/11/92	1115	199.00	2.1	1.56	0.38	5.1
03/12/92	1115	24.00	2.3	2.94	0.38	3.6
06/01/93	1200	137.00	1	1.04	0.54	4
10/02/93	1130	53.60	0.6	2.12	0.44	3.4
03/03/93	1145	141.00	1.1	1.71	0.28	3.2
07/04/93	1110	134.00	2	1.91	0.18	3.8
05/05/93	1200	48.50	1.8	3.4	0.49	2.4
03/06/93	1110	272.00	1.7	1.29	0.29	6.8
07/07/93	1205	696.00	1.1	2.43	0.31	5.3
04/08/93	1140	46.90	2.4	2.36	0.29	7.3
15/09/93	1100	33.50	3.8	3.28	0.46	4.6
06/10/93	1120	100.00	2.5	1.46	0.26	4.9
10/11/93	1150	40.20	2.9	2.02	0.39	3.6
08/12/93	1140	117.00	2.1	1.63	0.43	4.4
05/01/94	1150	59.30	3.5	1.97	0.47	4.2
09/02/94	1145	32.40	1.2	1.55	0.43	2.6
03/03/94	1143	205.00	1.3	1.26	0.37	2.7
06/04/94	1145	43.20	1.8	2.14	0.32	3.8
05/05/94	1100	81.60	2	1.57	0.05	4.4
08/06/94	1127	225.00	1	0.89	0.24	5.2
07/07/94	1340	173.00	1.3	1.21	0.33	6.2
04/08/94	1225	173.00	1.5	1.35	0.36	5.5
14/09/94	1118	66.30	3	2.13	0.33	5.1
19/10/94	1155	188.00	3	2.01	0.44	3.9
09/11/94	1115	76.60	1.6	1.86	0.37	3.5
07/12/94	1115	38.0	1.3	****	0.49	2.6
Média		114.10	2.84	2.18	0.40	4.4
Moda		24.00	1.30	1.97	0.38	4.4
Mediana		74.40	2.30	1.86	0.37	4.4
Máximo		696.00	8.20	7.68	0.95	8.2
Mínimo		10.10	0.60	0.89	0.05	0.8
Desv padrão		112.98	1.67	1.23	0.15	1.4

